JOINT INSTITUTE
交大密西根学院

上海交通大学密西根学院

VV256 RC1 Part2

Shao Yujie

Extension Part: implicit ODE of first order (may not be tested)

一阶隐式常微分方程是具有如下形式的微分方程

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (*)$$

其中，y 是变量 x 的函数。

一般来说，如果我们可以解出未知函数的一阶导数 y'，即有形式 $y' = f(x, y)$，我们可以使用之前的方法解决，但是有时不易解出或根本解不出一阶导数，因此我们需要讨论一般形式的可解问题。

我们主要关注以下四种特殊情况

$$\begin{aligned} &1.\ y = f(x, y'), \quad 2.\ x = f(y, y'), \\ &3.\ F(x, y') = 0, \quad 4.\ F(y, y') = 0. \end{aligned}$$

形如 $F(x, y, y')=0$ 为一阶隐式微分方程

(1) $y=f(x, y')$ (2) $x=f(y, y')$

(3) $F(x, y')=0$ (4) $F(y, y')=0$

(1) solve $y=f(x, \frac{dy}{dx})$ Let $p=\frac{dy}{dx}$

$y=f(x, p)$ 同对 x 求导

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \boxed{p}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\boxed{\frac{dp}{dx}}$$

$\Rightarrow$ can be solved $p=\varphi(x, y)$

$\Rightarrow y=f(x, \varphi(x, y))$

eg1: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2x\frac{dy}{dx}=y$ $\frac{dy}{dx}=p$

$y=p^3+2xp$ 对 x 求导

$p=3p^2\frac{dp}{dx}+2x\frac{dp}{dx}+2p$ $\boxed{3p^2dp+2xdp+pdx=0}$

观察 $3p^2dp \sim p$

$2xdp \sim x, p$

$pdx \sim x, p$ $\Rightarrow$ 构造同消去 xdp

pdx 项

xp

$2xpdp+p^2dx=xd(p^2)+p^2dx$

$=d(p^2x)$

$\Rightarrow 3p^3dp+d(p^2x)=0$ $\frac{3}{4}p^4+xp^2=C$

……

(2) solve $x=f(y, \frac{dy}{dx})$

引入 $p=\frac{dy}{dx}$ $x=f(y, p)$ 对 y 求导

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$ 同理可解

eg: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2x\frac{dy}{dx}-y=0$ $p=\frac{dy}{dx}$

$p^3+2xp=y$ $x=\frac{y-p^3}{2p}$ 对 y 求导

$$\frac{1}{p}=\frac{p\left(1-3p^2\frac{dp}{dy}\right)-(y-p^3)\frac{dp}{dy}}{2p^2}$$

$pdy+ydp+2p^3dp=0$

$py+\frac{1}{2}p^4=C$ ……

$y=\frac{C-p^4}{2p}$ $x=\frac{C-3p^4}{4p^2}$ ……

(3) solve $F(x, y')=0$ $p=y'=\frac{dy}{dx}$

$F(x, p)=0$ ~ 一条曲线

参数形式： $x=\varphi(t)$ $dy=p\,dx$

$p=\psi(t)$ $dy=\psi(t)\varphi'(t)dt$

$y=\int \psi(t)\varphi'(t)\,dt+C$

$\begin{cases} x=\varphi(t) \end{cases}$ 可解

eg: $x^3+y'^3-3xy'=0$

Let $y'=p=tx$

$y'\sim x$

$3\sim 3$

比值消去

$x=\frac{3t}{1+t^3}$ $p=\frac{3t^2}{1+t^3}$

$dy=\frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt$

$\Rightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{2}\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}+C\cdots \\ x=\frac{3t}{1+t^2} \end{cases}$

(4) solve $F(y, y')=0$ $p=y'$

$y=\varphi(t)$ $dy=p\,dx \Rightarrow \varphi'(t)dt=\psi(t)dx$

$p=\psi(t)$ $dx=\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt$

$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C$ $y=\varphi(t)$ —— 可解

eg: $y^2(1-y')=(2-y')^2$ $y\sim 2-y'$

$2\sim 2$

$2-y'=yt$ 消去

$y^2(yt-1)=y^2t^2$ $y=\frac{1}{t}+t$

$2-y'=1+t^2$

$y'=1-t^2$

$\frac{dy}{dx}=1-t^2$ $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$

$dx=-\frac{1}{t^2}dt$ $\begin{cases} x=\frac{1}{t}+C \\ y=\frac{1}{t}+t \end{cases}$

……

From Goat Simulator 3

Thank you !