UM-SJTU JOINT INSTITUTE

VP160 RC2

Shao
Yujie

Contents

- Kinematics in 3D for Different Coordinate System
- Force and Inertial Frame of Reference
- Air/Fluid Drag(maybe tested)

Cartesian Coordinate

Basic Formulas

$$\vec{r} = x(t)\hat{n}_x + y(t)\hat{n}_y + z(t)\hat{n}_z$$
$$\vec{v} = \dot{x}(t)\hat{n}_x + \dot{y}(t)\hat{n}_y + \dot{z}(t)\hat{n}_z$$
$$\vec{a} = \ddot{x}(t)\hat{n}_x + \ddot{y}(t)\hat{n}_y + \ddot{z}(t)\hat{n}_z$$

Cylindrical Coordinate

Basic Formulas

$$\vec{r} = \rho \hat{n}_\rho + z\hat{n}_z$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{n}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{n}_\phi + \dot{z}\hat{n}_z$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{n}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{n}_\phi + \ddot{z}\hat{n}_z$$

Please review the formula derivation process

Spherical Coordinate

Basic Formulas

$$\vec{r} = r\sin(\theta)\cos(\phi)\hat{n}_x + r\sin(\theta)\sin(\phi)\hat{n}_y + r\cos(\theta)\hat{n}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{n}_r + r\dot{\theta}\hat{n}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\phi}\hat{n}_\phi$$

$$\begin{aligned}\vec{a} = &\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2\right)\hat{n}_r \\ &+ \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2\right)\hat{n}_\theta \\ &+ (r\sin(\theta)\ddot{\phi} + 2\dot{r}\sin(\theta)\dot{\phi} + 2r\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi})\hat{n}_\phi\end{aligned}$$

Please review the formula derivation process

Natural Coordinate

Basic Vectors

- $\hat{n}_\tau$: along the direction of $\vec{v}$
- $\hat{n}_n$ and $\hat{n}_b$: perpendicular to the direction of $\vec{v}$

Basic Formulas

$$\hat{n}_\tau = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

$$\hat{n}_n = \frac{d\hat{n}_\tau/dt}{\|d\hat{n}_\tau/dt\|}$$

$$\hat{n}_b = \hat{n}_\tau \times \hat{n}_n$$

$$\vec{v} = v\hat{n}_\tau$$

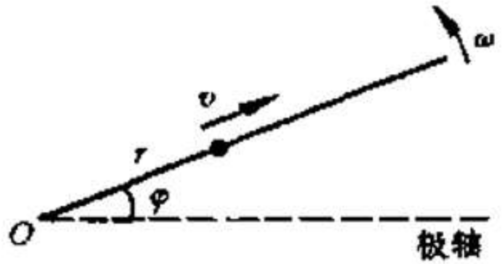
$$\vec{a} = \dot{v}\hat{n}_\tau + \frac{v^2}{R_c}\hat{n}_n$$

Please review the formula derivation process

A very old question

【题 10】 细杆绕端点 O 在平面内匀角速旋转，角速度为 ω，杆上一小环（可看作质点）相对杆作匀速运动，相对速度为 v. 设 $t=0$ 时刻小环位于杆的端点 O.

1. 试证明小环的运动轨迹为阿基米德螺线．
2. 试求小环在任意时刻的速度和加速度．
3. 试用作图法定性画出小环加速度在自然坐标系中的两个分量（切向加速度和法向加速度）.



If we only pay attention to the acceleration in the system, the question is very simple.

Solution

1) v, ω constant

$$\begin{cases} r = vt \\ \varphi = \omega t \end{cases} \qquad r = \frac{v}{\omega}\varphi \qquad \frac{v}{\omega}\ \text{constant} \qquad r \propto \varphi$$

为阿基米德螺线极坐标方程

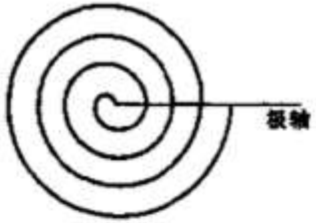
2) $v_r = \dot{r} = v$

$$v_\varphi = r\dot{\varphi} = \frac{v}{\omega}\varphi \cdot \omega = v\varphi = v\omega t$$

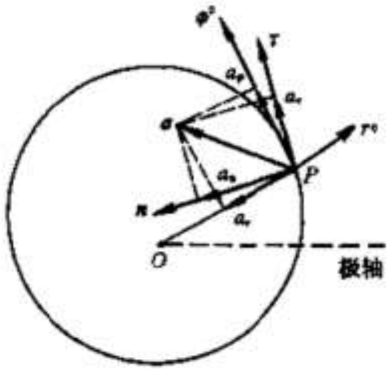
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = v\sqrt{1+\omega^2 t^2}$$ 方向沿切线

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -v\omega^2 t$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 2v\omega \qquad a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = v\omega\sqrt{4+\omega^2 t^2}$$



力图 1-10-2



力图 1-10-3

3. 如力图 1-10-3,在任意时刻 t,杆位于 OP,小环位于 P 点,以 P 为起点沿 OP 方向的 $\boldsymbol{r}^0$ 是极坐标系中的径向单位矢量,与它垂直的 $\boldsymbol{\varphi}^0$ 是横向单位矢量. 图中定性画出小环所在处(P 点)轨迹的曲率圆(虚线),它与小环的轨迹(阿基米德螺线)在 P 点相切. 以 P 为起点,与曲率圆相切的 $\boldsymbol{\tau}$ 以及指向圆心的 $\boldsymbol{n}$ 分别是自然坐标系中的切向单位矢量和法向单位矢量. 在任意时刻 t,小环在 P 点的加速度为图中的矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{r}^0$ 和 $\boldsymbol{\varphi}^0$ 方向的投影 a_r 和 a_φ 分别是加速度 $\boldsymbol{a}$ 在极坐标系中的径向分量和横向分量, $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 方向的投影 a_τ 和 a_n 分别是加速度 $\boldsymbol{a}$ 在自然坐标系的两个分量, a_τ 是切向加速度, a_n 是法向加速度.

A simple question

一直杆，一端与半径为R的固定大圆环连接在O点，直杆还传过套在大环上的小环M，如图所示，已知直杆从初始位置角度α处开始，以角速度ω逆时针转动，求小环M的速度和加速度，在三种坐标系下给出三种解决方法

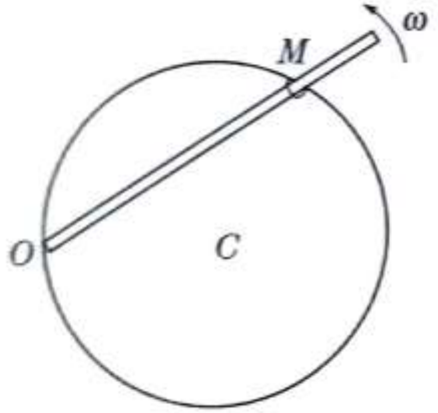


图 1 - 48

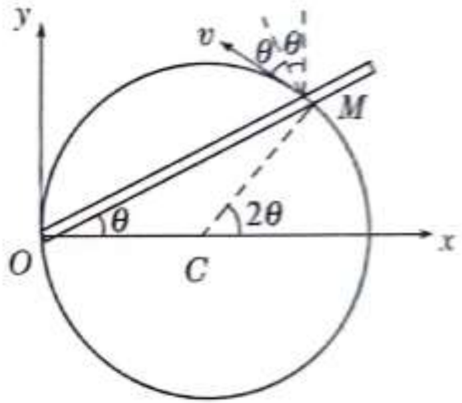


图 1 - 49

Solution 1

解法一：以 O 点为原点建立直角坐标系 xOy（图 1－49），则小环 M 的运动学方程为

$$x=\overline{OM}\cos\theta,\ y=\overline{OM}\sin\theta.$$

若 $t=0$ 时，$\theta=\alpha$，则

$$\theta=\omega t+\alpha.$$

又

$$\overline{OM}=2R\cos\theta,$$

故

$$x=2R\cos^2(\omega t+\alpha),\ y=R\sin 2(\omega t+\alpha).$$

通过求导可得速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=[-2R\omega\sin 2(\omega t+\alpha)]\boldsymbol{i}+[2R\omega\cos 2(\omega t+\alpha)]\boldsymbol{j}.$$

由此可知速度的大小为 $2R\omega$，$\boldsymbol{v}$ 与 y 轴的夹角为 $2(\omega t+\alpha)$，即 2θ，从图上可以看出，$\boldsymbol{v}$ 的方向正是 M 点圆的切线方向.

再求一次导数可得小环 M 的加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}=[-4R\omega^2\cos 2(\omega t+\alpha)]\boldsymbol{i}+[-4R\omega^2\sin^2(\omega t+\alpha)]\boldsymbol{j}.$$

由此可知加速度的大小为 $4R\omega^2$，方向指向圆心.

Solution2

解法二：以 O 为原点、x 轴为极轴建立平面极坐标系（图 1－50），则小环的运动学方程

$$r=2R\cos(\omega t+\alpha);\theta=\omega t+\alpha.$$

小环 M 的速度

$$v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}^0+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\theta}^0=[-2R\omega\sin(\omega t+\alpha)]\boldsymbol{r}^0+[r\omega]\boldsymbol{\theta}^0$$

$$=[-2R\omega\sin(\omega t+\alpha)]\boldsymbol{r}^0+[2R\omega\cos(\omega t+\alpha)]\boldsymbol{\theta}^0.$$

由此可知速度的大小为 $2R\omega$，$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{\theta}^0$ 的夹角为 $(\omega t+\alpha)$，即 $\boldsymbol{v}$ 正好沿 M 点的切线方向.

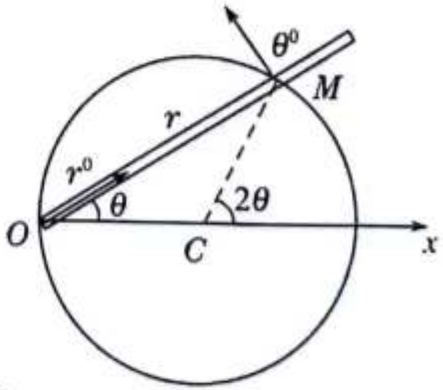


图 1－50

小环 M 的加速度为 $\boldsymbol{a}=\left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}+r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\boldsymbol{r}^0+\left[r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right]\boldsymbol{\theta}^0$

$$=[-4r\omega^2\cos(\omega t+\alpha)]\boldsymbol{r}^0+[-4R\omega^2\cos(\omega t+\alpha)]\boldsymbol{\theta}^0,$$

此式表明加速度的大小为 $4R\omega^2$，其方向指向圆心.

Solution 3

解法三：采用自然坐标系，取大圆上 A 点为计算弧坐标的起点，以运动方向为其正方向（图 1－51），则小环 M 的运动学方程：

$$s=\overset{\frown}{AM}=R(2\theta)=2R(\omega t+\alpha).$$

则可求得小环 M 的速度和加速度：

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}^0=2R\omega\boldsymbol{\tau}^0,$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\tau}^0+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}^0=\frac{4R^2\omega^2}{R}\boldsymbol{n}^0=4R\omega^2\boldsymbol{n}^0.$$

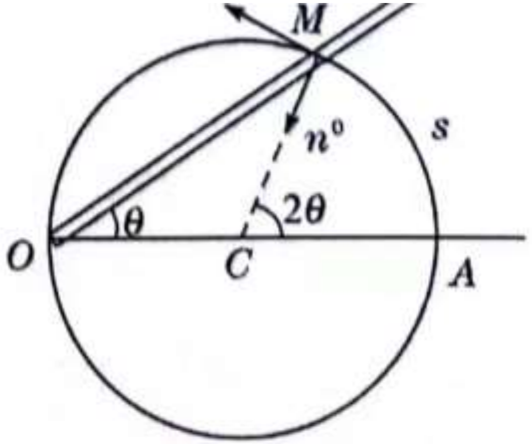


图 1－51

An interesting question

绳的一端固定在半径为r的圆柱侧面上，靠近圆柱的底部，绳子缠绕圆柱k圈（k为整数），绳的自由端系着一个小球，使球具有速度v，沿圆柱半径方向如图，试求：

（1）在多少时间内，绳子又全部缠在圆柱上，圆柱固定在光滑的平面上

（2）小球的加速度

（3）小球的运动轨迹

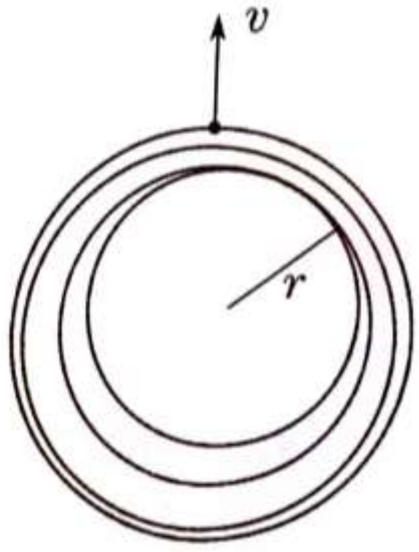


图 1－62

Solution

解：在每一瞬间，小球均以细线与圆柱的切点为瞬时中心，以未缠绕的细线为半径做圆周运动，如图 1-63，故小球的速度总是垂直未缠绕的细线，因此线中张力对小球不做功，即小球的速度大小不变而方向不断变化.

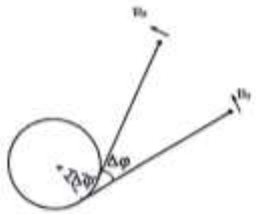


图 1-63

假设细线依次缩短 $\Delta l=\frac{L}{n}(n\to\infty)$ 所需的时间分别为 Δt_1，Δt_2，…，Δt_n，则

$$\frac{v_0\cdot\Delta t_1}{L}=\frac{\Delta l}{r}，即\ \Delta t_1=\frac{L\Delta l}{rv_0}；$$

$$\frac{v_0\cdot\Delta t_2}{L-\Delta l}=\frac{\Delta l}{r}，即\ \Delta t_2=\frac{(L-\Delta l)\cdot\Delta l}{rv_0}；$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{v_0\Delta t_n}{L-(n-1)\Delta l}=\frac{\Delta l}{r}，即\ \Delta t_n=\frac{[L-(n-1)\Delta l]\Delta l}{rv_0}.$$

所以 $t=\Delta t_1+\Delta t_2+\cdots+\Delta t_n=\frac{L^2-(\Delta l)^2(1+2+\cdots+n-1)}{rv_0}=\frac{L^2-(\Delta l)^2\frac{n(n-1)}{2}}{rv_0}=\frac{L^2}{2rv_0}$

注意最后半周是做半径为 $k\cdot 2\pi r$ 的圆周运动，得到总时间为 $T=\frac{2\pi^2kr(2k+1)}{v}$（更简单的求时间的方法是作 φ-$\frac{1}{\omega}$ 图，为一直线，直线与下面坐标轴围成的面积即为时间）.

(2) 设在某时刻 t，细线已解开的长度为 l；在 $(t+\mathrm{d}t)$ 时刻，细线已解开的长度为 $(l+\mathrm{d}l)$，如图 1-64 所示. 设圆柱半径为 r，由几何关系及 v 大小不变，有

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\mathrm{d}l}{r}=\frac{v\mathrm{d}t}{l},$$

即 $\qquad l\mathrm{d}l=rv\mathrm{d}t.$

积分，因初始条件为 $t=0$ 时 $l=0$，得 $\quad l=\sqrt{2rvt}.$

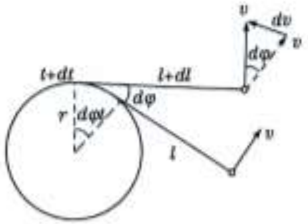


图 1-64

因为 $\qquad \frac{|\mathrm{d}v|}{v}=\frac{\mathrm{d}l}{r},$

加速度大小为 $\qquad a=\frac{|\mathrm{d}v|}{\mathrm{d}t}=\frac{v\mathrm{d}l}{r\mathrm{d}t},$

因为 $\qquad \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{rv}{2t}},$

代入上式，得出 $\qquad a=\frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{2rt}}$

a 的方向指向细线与圆柱的切点. 加速度 a 实际上是小球瞬时圆周运动的法向加速度.

(3) 如图 1-65，取平面直角坐标系 xOy，$t=0$ 时，小球位于 $(r,0)$，相应的 $\varphi=0$，在任意时刻 t，解开的线长为 l，小球与 O 点的距离为 $\rho=\sqrt{r^2+l^2}$.

因为 $\qquad \mathrm{d}\varphi=\frac{v\mathrm{d}t}{l}=\frac{v\mathrm{d}t}{\sqrt{2rvt}}=\sqrt{\frac{v}{2r}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}},$

积分，得 $\qquad \varphi=\sqrt{\frac{2vt}{r}}+c.$

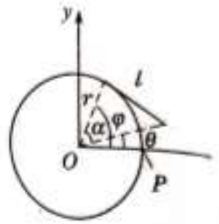


图 1-65

初始条件为 $t=0$ 时，$\varphi=0$，故积分常数 $c=0$，得 $\varphi=\sqrt{\frac{2vt}{r}}$.

因为 $l=r\varphi$，所以 $\rho=\sqrt{l^2+r^2}=r\sqrt{1+\varphi^2}$.

小球的 x，y 坐标为

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta=\rho\cos(\varphi-\alpha)=\rho(\cos\varphi\cos\alpha+\sin\varphi\sin\alpha),\\ y=l\sin\theta=\rho\sin(\varphi-\alpha)=\rho(\sin\varphi\cos\alpha-\cos\varphi\sin\alpha),\end{cases}\quad \begin{cases}\cos\alpha=\frac{r}{\rho}=\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}},\\ \sin\alpha=\frac{l}{\rho}=\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}},\end{cases}$$

则 $\qquad \begin{cases}x=r(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi),\\ y=r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\end{cases}$ 即为小球的轨迹方程.

Second Part: Force and Inertial Frame of Reference

Force

Interaction between two objects or an object and the environment.

Inertial Frame of Reference

In a inertial frame of reference, if the net force on a particle is zero, then its acceleration is zero.

Newton's Law

- A particle acted upon by zero net force moves with constant velocity.
- In an inertial frame of reference, acceleration of a particle is directly proportional to the net force acting upon it, and inversely proportional to its mass.
- The mutual forces of action and reaction between two bodies are equal in magnitude and opposite in direction.

Example Question

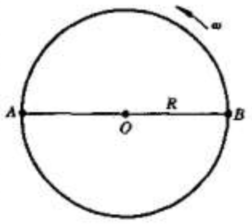
【题 18】 如力图 2－18－1，半径为 R 的圆盘与水平面平行，绕通过盘中心 O 的竖直轴以角速度 ω 匀速旋转．盘边缘 A 点处的射手相对于圆盘以水平初速 v_0 发射子弹，目标是直径 AB 的另一端点 B．设子弹速度远大于盘的转速，且发射子弹不影响圆盘的角速度，设空气阻力可忽略．试问射手应瞄准何方才能击中目标？从射手看来，子弹的轨迹如何？

This question is very similar to last year’s midterm

Please solve it in two methods:

Solution

解此题有两种方法．一是根据子弹受力情况列出动力方程，通过积分运算求出子弹的轨迹．击中目标意味着运动轨迹必须通过 B 点，由此可求出发射方向．另一是根据子弹的受力特点，直接判断其运动轨迹，借助于几何方法得到子弹的运动轨迹．



力图 2－18－1

【解】 方法一．取圆盘为参考系，如力图 2－18－2，取直角坐标 $Oxyz$，原点 O 在圆盘中心，xy 平面为盘面，z 轴垂直于盘面．A 和 B 两点的坐标分别为 $(-R,0)$ 和 $(R,0)$．设子弹初速 $\boldsymbol{v}_0$ 与 x 轴的夹角为 θ．子弹的动力方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是子弹在 xy 平面内的位矢，$\boldsymbol{v}$ 是子弹相对于圆盘的速度．在所设置的坐标系中，

$$\boldsymbol{r}=(x,y,0)$$
$$\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega)$$
$$\boldsymbol{v}=(\dot{x},\dot{y},0)$$

代入动力方程，写成分量形式，得

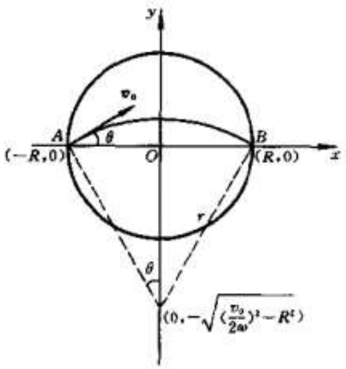
$$\begin{cases}\ddot{x}=2\omega\dot{y}\\ \ddot{y}=-2\omega\dot{x}\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\mathrm{d}\dot{x}=2\omega\mathrm{d}y\\ \mathrm{d}\dot{y}=-2\omega\mathrm{d}x\end{cases}$$

积分，得

$$\begin{cases}\dot{x}=2\omega y+C_1\\ \dot{y}=-2\omega x+C_2\end{cases}$$



力图 2－18－2

初条件为，当 $x=-R$，$y=0$ 时，

$$\dot{x}=v_0\cos\theta,\quad \dot{y}=v_0\sin\theta$$

故积分常量为

$$C_1=v_0\cos\theta$$
$$C_2=v_0\sin\theta-2\omega R$$

代入，得

$$\begin{cases}\dot{x}=2\omega y+v_0\cos\theta\\ \dot{y}=-2\omega x+v_0\sin\theta-2\omega R\\ \quad=-2\omega(x+R)+v_0\sin\theta\end{cases}$$

两式相除，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2\omega y+v_0\cos\theta}{-2\omega(x+R)+v_0\sin\theta}$$

即

$$[-2\omega(x+R)+v_0\sin\theta]\mathrm{d}x=(2\omega y+v_0\cos\theta)\mathrm{d}y$$

Solution

再积分，得轨迹方程为

$$-\omega(x+R)^2+(v_0\sin\theta)x=\omega y^2+(v_0\cos\theta)y+C$$

因 $x=-R, y=0$ 是轨迹曲线上的一点，故积分常量为

$$C=-v_0R\sin\theta$$

代入轨迹方程，得

$$-\omega(x+R)^2+(v_0\sin\theta)x=\omega y^2+(v_0\cos\theta)y-v_0R\sin\theta$$

或写成

$$\left(x+R-\frac{v_0}{2\omega}\sin\theta\right)^2+\left(y+\frac{v_0}{2\omega}\cos\theta\right)^2=\frac{v_0^2}{4\omega^2}$$

这是一个圆的方程．

为了使子弹能击中目标 B，上述圆必须通过 B 点，把 B 点的坐标 $x=R, y=0$ 代入，得

$$\sin\theta=\frac{2\omega R}{v_0}$$

所以，为了能击中目标 B，从 A 点以 v_0 发射的子弹的方位角应为

$$\theta=\arcsin\left(\frac{2\omega R}{v_0}\right)$$

相应的轨迹方程为

$$x^2+\left[y+\sqrt{\left(\frac{v_0}{2\omega}\right)^2-R^2}\right]^2=\frac{v_0^2}{4\omega^2}$$

这是圆心位于$\left[0,-\sqrt{\left(\frac{v_0}{2\omega}\right)^2-R^2}\right]$，半径 $r=\frac{v_0}{2\omega}$的圆的方程．如力图 2－18－2 所示．

方法二．因科里奥利力为

$$\boldsymbol{F}_c=2m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}$$

其方向总是与 $\boldsymbol{v}$ 垂直的，故子弹在水平面内相对于圆盘作匀速圆周运动，$\boldsymbol{F}_c$ 提供所需的向心力．由牛顿第二定律，有

$$2mv_0\omega=m\frac{v_0^2}{r}$$

故圆周半径为

$$r=\frac{v_0}{2\omega}$$

为使轨迹圆通过 B 点，必须满足几何关系

$$R=r\sin\theta$$

即

$$\sin\theta=\frac{R}{r}=\frac{2\omega R}{v_0}$$

从力图 2－18－2 中的几何关系不难得出圆心的坐标为

$$\begin{cases}x=0\\ y=-\sqrt{\left(\frac{v_0}{2\omega}\right)^2-R^2}\end{cases}$$

圆的方程为

$$x^2-\left[y+\sqrt{\left(\frac{v_0}{2\omega}\right)^2-R^2}\right]^2=\frac{v_0^2}{4\omega^2}$$

JOINT INSTITUTE 交大密西根学院

Third Part: Motion with Air/Fluid Drag

This part may not be tested, only for fun

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot L}{\mu}$$

Where:

1. Re represents the Reynolds number,
2. ρ denotes the density of the fluid,
3. v represents the velocity of the fluid relative to the object or within a conduit,
4. L represents a characteristic length or characteristic linear dimension of the object or conduit, and
5. μ represents the dynamic viscosity of the fluid.

Stoke drag force(linear)

Applicable in the low Reynolds number regime, where the fluid flow is slow or the object's size is small compared to the mean free path of the fluid molecules.

$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

$$k = 6\pi\eta R$$

Where:

1. F is the Stoke drag force,
2. η is the dynamic viscosity of the fluid,
3. r is the radius of the object,

Quadratic drag

$$\vec{F} = -b|\vec{v}|^2 \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$b = \frac{1}{2}\rho C_d A$$

1. F is the quadratic drag force,
2. ρ is the density of the fluid,
3. C_d is the drag coefficient that depends on the object's shape,
4. A is the reference area (area of the object perpendicular to the flow),

Thanks

From Batman: Arkham Asylum